UNIWERSYTET JAGIELLOŃSKI W KRAKOWIE

V edycja szkolnego konkursu
„O jeden poziom abstrakcji wyżej"
objętego patronatem Dziekana Wydziału Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Jagiellońskiego.

rok szkolny 2017/18

I etap

1.Wyznacz wszystkie rzeczywiste rozwiązania równania

$$\left(x^2-2014x-3\cdot 2017\right)^2+\left(x^2-2012x-5\cdot 2017\right)^2+\left(x^2-2010x-7\cdot 2017\right)^2=0$$

2.**Średnią kontrharmoniczną** dwóch liczb dodatnich x i y nazywamy liczbę

$$C=\frac{x^2+y^2}{x+y}.$$

Wykaż, że $A^2\geq H\cdot C$, gdzie A oznacza średnią arytmetyczną, H średnią harmoniczną dwóch liczb dodatnich x i y.

3. Punkt B leży na prostej między punktami A i C. W tej samej półpłaszczyźnie o krawędzi AB zawierają się trójkąty równoboczne ABK i BCL. Udowodnij, że środek odcinka AL, środek odcinka CK i punkt B są wierzchołkami trójkąta równobocznego

4.Wyznacz pole figury płaskiej F, wiedząc, że $F=\{(x,y): x,y\in R \wedge \left||x|+|y|-4\right|\leq 1\}$

5. Uporządkuj rosnąco liczby x, y, z, jeżeli

$$x=\left(\left(\left(10^{\sqrt[2017]{2}}\right)^{\sqrt[2017]{3}}\right)^{\cdots}\right)^{\sqrt[2017]{2017}}$$

$$y=\left(10^{\frac{1}{\sqrt[2017]{2}}}\right)^2$$

$$z=\sqrt[2017]{10}\cdot\sqrt[2017]{100}\cdot\sqrt[2017]{1000}\cdot\ldots\cdot\sqrt[2017]{100\ldots0}$$

i w ostatnim czynniku liczby z występuje 2017 zer.

Termin oddania 06.11.2017