



UNIWERSYTET  
JAGIELLOŃSKI  
W KRAKOWIE

VI edycja szkolnego konkursu  
„O jeden poziom abstrakcji wyżej”  
objętego patronatem Dziekana Wydziału Matematyki  
i Informatyki Uniwersytetu Jagiellońskiego.

rok szkolny 2018/19

**III etap**

1. Rozwiąż równanie  $x^2 + y^2 = x + y + 8$  w liczbach całkowitych  $x, y$ .
2. Dla jakich wartości parametru  $b$  jedna z figur ograniczonych osią  $OX$ , wykresem funkcji  $f(x) = |x - 2| + b$  oraz prostą o równaniu  $x = 1$ , jest czworokątem o polu 7?
3. Dany jest okrąg  $o_1$  o średnicy  $AB$ . Okrąg  $o_2$  jest styczny do okręgu  $o_1$  i odcinka  $AB$  w jego środku. Okrąg  $o_3$  jest styczny do okręgów  $o_1$  i  $o_2$  oraz odcinka  $AB$ . Oblicz stosunek pól kół ograniczonych okręgami  $o_1$  i  $o_3$ , jeżeli promień okręgu  $o_1$  ma długość 4.
4. Wykaż, że jeśli  $n$  jest liczbą naturalną dodatnią podzielną przez 4, to liczba  $4^n + 2^{n+3} + 16$  jest podzielna przez 100.
5. Wyznacz sumę  $S = \sin \alpha + \sin 2\alpha + \sin 3\alpha + \dots + \sin k\alpha$ , gdzie  $k$  jest daną liczbą całkowitą dodatnią.