UNIWERSYTET JAGIELLOŃSKI W KRAKOWIE

VII edycja szkolnego konkursu
„O jeden poziom abstrakcji wyżej"
objętego patronatem Dziekana Wydziału Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Jagiellońskiego.

rok szkolny 2019/20

I etap

1. Wykaż, że dla dowolnych liczb naturalnych a i b zachodzi nierówność:

$$a+b \le NWD(a,b)+NWW(a,b)$$

2. W zbiorze liczb całkowitych określono następujące działanie:

$$a*b=\begin{cases} a+b-a\cdot b, & gdy\ a\cdot b=2k, \quad gdzie\, k\in Z \\ a^2+b^2-a\cdot b & gdy\ a\cdot b=2k-1, \quad gdzie\, k\in Z \end{cases}$$ (Z– zbiór liczb całkowitych)

Uzasadnij, że jeżeli co najmniej jedna liczba a lub b jest nieparzysta, to wynik działania $a*b$ jest liczbą nieparzystą.

3. Wyznacz wszystkie trójki (p,q,r) kolejnych liczb pierwszych, dla których $p^2+q^2+r^2$ jest liczbą pierwszą.

4. W trójkącie prostokątnym a i b są długościami przyprostokątnych, c – długością przeciwprostokątnej, a h jest długością wysokości opuszczonej z wierzchołka kąta prostego. Udowodnij, że $c+h>a+b$.

5. Przekątne pewnego czworokąta wypukłego o polu Q dzielą go na cztery trójkąty, których pola wynoszą odpowiednio P_1, P_2, P_3, P_4.Wykaż, że

$$P_1\cdot P_2\cdot P_3\cdot P_4=\frac{(P_1+P_2)^2\cdot(P_2+P_3)^2\cdot(P_3+P_4)^2\cdot(P_4+P_1)^2}{Q^4}$$

Termin oddania 08.11.2019