UNIWERSYTET JAGIELLOŃSKI W KRAKOWIE

VIII edycja szkolnego konkursu
„O jeden poziom abstrakcji wyżej”
objętego patronatem Dziekana Wydziału Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Jagiellońskiego.

rok szkolny 2020/21

III etap

1. Wykaż, że dla każdej liczby $n \in N_+$ prawdziwa jest równość:

$$1 + 7(1!)^3 + 26(2!)^3 + \cdots + ((n+1)^3 - 1)(n!)^3 = ((n+1)!)^3$$

2. Udowodnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych dodatnich x, y, z zachodzi nierówność:

$$\sqrt{x^2+1} + \sqrt{y^2+1} + \sqrt{z^2+1} \geq \sqrt{6(x+y+z)}.$$

3. Wielomian W ma postać $W(x) = x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x$, gdzie a_4, a_3, a_2, a_1 są pewnymi liczbami rzeczywistymi. Wiedząc dodatkowo, że $W(2) = 2$, $W(4) = 4$, $W(6) = 6$, $W(8) = 8$, oblicz $W(10)$.

4. Na płaszczyźnie obrano w dowolny sposób 2021 różnych punktów: $A_1, A_2, \dots, A_{2021}$. Dowieść, że na dowolnym okręgu o promieniu długości 1, leżącym na tej płaszczyźnie, istnieje taki punkt B, że

$$|A_1B| + |A_2B| + |A_3B| + \cdots + |A_{2021}B| \geq 2021.$$

5. W trójkącie ABC obrano na bokach AC i BC punkty M i N tak, że punkt M podzielił bok AC w stosunku 2 : 3, zaś punkt N podzielił bok BC w stosunku 1 : 2. Proste AN i BM przecinają się w punkcie P. Prosta CP przecina bok AB w punkcie *X*. Obliczyć stosunek $\frac{|AX|}{|XB|}$ .Rozważyć wszystkie przypadki.

Termin oddania 18.01.2021.
Rozwiązania proszę przesłać na adres matematyka-konkurs@i-lo-tarnow.pl