



UNIwersytet
JAGIELLOŃSKI
W KRAKOWIE

**X edycja szkolnego konkursu
„O jeden poziom abstrakcji wyżej”
objętego patronatem Dziekana Wydziału Matematyki
i Informatyki Uniwersytetu Jagiellońskiego.**

rok szkolny 2022/23

III etap

1. Dodając sumę, różnicę, iloczyn i iloraz dwóch liczb całkowitych otrzymamy liczbę 450. Znajdź te liczby.

2. Niech $[x]$ oznacza cechę liczby x . Wykaż, że dla dowolnej liczby naturalnej n liczba

$$a_n = \left[\frac{n+4}{2} \right] + 3n - 2 \cdot (-1)^n \text{ jest podzielna przez } 7$$

3. Niech funkcja $f: R_+ \rightarrow R_+$ będzie funkcją rosnącą. Wykaż, że dla dowolnych $a, b \in R_+$ zachodzi nierówność:

$$\frac{1}{f(a)+a} + \frac{1}{f(b)+b} \geq \frac{1}{f(a)+b} + \frac{1}{f(b)+a}.$$

4. Udowodnij, że w każdym trójkącie zachodzi nierówność: $u+v+w \geq 6r$ gdzie u, v, w są odległościami środka okręgu o promieniu r wpisanego w ten trójkąt od wierzchołków trójkąta.

5. Udowodnij, że dla $a \in (0,1)$ i $b \in (0,1)$ zachodzi nierówność:

$$\log_a \frac{2ab}{a+b} + \log_b \frac{2ab}{a+b} \geq 2.$$