



UNIWERSYTET
JAGIELLOŃSKI
W KRAKOWIE

**X edycja szkolnego konkursu
„O jeden poziom abstrakcji wyżej”
objętego patronatem Dziekana Wydziału Matematyki
i Informatyki Uniwersytetu Jagiellońskiego.**

rok szkolny 2022/23

V etap

1. Niech x_1 oraz x_2 będą pierwiastkami równania: $x^2 - 6x + 1 = 0$. Wykaż, że dla każdej liczby naturalnej n suma: $(x_1)^n + (x_2)^n$ jest liczbą całkowitą.
2. Liczba a jest dowolną liczbą rzeczywistą różną od zera. Pewna funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ spełnia warunek: $f(x - a) + f(x) + f(x + a) = 0$ dla każdej liczby rzeczywistej x . Zbadaj, czy funkcja f jest funkcją okresową.
3. Długości boków trójkąta ABC spełniają równanie: $\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} = \frac{3}{a+b+c}$. Wykaż, że jeden z kątów wewnętrznych trójkąta ABC ma miarę wyrażoną liczbą całkowitą.
4. Dane są ciągi (a_n) i (b_n) , przy czym $a_1 = 2$ i $a_{n+1} = 2^{a_n}$ oraz $b_1 = 3$ i $b_{n+1} = 3^{b_n}$, dla $n \in \mathbb{N}^+$. Wyznacz najmniejszą liczbę naturalną k taką, że: $a_k > b_{2023}$.
5. Liczby rzeczywiste a, b, c spełniają nierówność: $\sin a + \sin b + \sin c \geq \frac{3}{2}$.

Udowodnij, że: $\sin\left(a - \frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(b - \frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(c - \frac{\pi}{6}\right) \geq 0$.