



UNIWERSYTET
JAGIELLOŃSKI
W KRAKOWIE

**XII edycja szkolnego konkursu
„O jeden poziom abstrakcji wyżej”
objętego patronatem Dziekana Wydziału Matematyki
i Informatyki Uniwersytetu Jagiellońskiego.**

rok szkolny 2024/25

III etap

1. Udowodnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych dodatnich x, y, z zachodzi

nierówność:
$$\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{y^2 + 1} + \sqrt{z^2 + 1} \geq \sqrt{6(x + y + z)}.$$

2. Z posiadanej ilości żeliwa można wykonać tyle odlewów, ile kilogramów waży jeden odlew. Jeżeli zwiększymy dwukrotnie ciężar każdego odlewu, to z tej samej ilości żeliwa wykonamy o 33 odlewy mniej, przy czym zostanie jeszcze 65 kg żeliwa. Oblicz ciężar posiadanego żeliwa.

3. Dany jest kąt o mierze 60° . Ramiona tego kąta przecięto prostą p prostopadłą do jednego z jego ramion i wpisano w niego dwa koła styczne do jego ramion i prostej p . Znajdź stosunek pól tych kół.

4. Sprawdź, czy liczba $\sqrt[3]{6 + \sqrt[3]{6 + \sqrt[3]{6 + \dots}}}$ jest wymierna czy niewymierna.

5. Udowodnij, że w Warszawie mieszka przynajmniej dwóch ludzi (żaden z nich nie jest łysy), którzy mają tyle samo włosów na głowie.