



UNIWERSYTET
JAGIELLOŃSKI
W KRAKOWIE

**XII edycja szkolnego konkursu
„O jeden poziom abstrakcji wyżej”
objętego patronatem Dziekana Wydziału Matematyki
i Informatyki Uniwersytetu Jagiellońskiego.**

rok szkolny 2024/25

V etap

1. Oblicz wartość wyrażenia: $\frac{3^2+1}{3^2-1} + \frac{5^2+1}{5^2-1} + \frac{7^2+1}{7^2-1} + \dots + \frac{2025^2+1}{2025^2-1}$.

2. Udowodnij, że jeśli dla liczb rzeczywistych a, b, c różnych od zera zachodzi równość:

$$\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} + \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} + \frac{c^2+a^2-b^2}{2ac} = 1$$

to spośród trzech składników tej sumy dwa są równe 1.

3. Wyznacz wszystkie liczby $n \in N_+$, dla których układ równań:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \dots + x_n = 9 \\ \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n} = 1 \end{cases}$$

ma rozwiązanie w zbiorze liczb dodatnich x_1, x_2, \dots, x_n . Dla każdej znalezionej wartości n podaj to rozwiązanie.

4. Przez punkt K leżący wewnątrz trójkąta ABC poprowadzono proste równoległe odpowiednio do boków tego trójkąta. Proste te podzieliły trójkąt ABC na sześć figur, z których trzy są trójkątami o polach P_1, P_2, P_3 . Wykaż, że jeśli P oznacza pole trójkąta ABC , to zachodzi równość: $P = (\sqrt{P_1} + \sqrt{P_2} + \sqrt{P_3})^2$.

5. Dana jest funkcja $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$ określona dla $x \in R - \{-1, 0, 1\}$. Wyznacz wszystkie wartości $x \in R - \{-1, 0, 1\}$, dla których spełniona jest równość:

$$f(x) + (f \circ f)(x) = (f \circ f \circ f)(x) + x + \frac{5}{6}.$$

Uwaga: zapis $(g \circ f)(x)$ oznacza złożenie funkcji, czyli $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.

Termin oddania 03.03.2025