UNIWERSYTET JAGIELLOŃSKI W KRAKOWIE

XIII edycja szkolnego konkursu
„O jeden poziom abstrakcji wyżej"
objętego patronatem Dziekana Wydziału Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Jagiellońskiego.

rok szkolny 2025/26

III etap

1. Wyznacz wszystkie pary dodatnich liczb całkowitych spełniające warunek: „suma ich: sumy, różnicy, iloczynu i ilorazu wynosi 2025".

2. Uzasadnij, że zachodzi nierówność:

$$\sqrt{1+\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}}+\ldots+\sqrt{1+\frac{1}{2024^2}+\frac{1}{2025^2}}>2025-\frac{1}{2024}$$

3. Rozwiąż układ równań:

$$\begin{cases}\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)=1\\ x^2+y^2=1\end{cases}$$

4. Dana jest funkcja: $f(x)=x^2+4x+3$. Oblicz wartość wyrażenia:

$$\left(1-\frac{3}{f(1)}\right)\cdot\left(1-\frac{3}{f(2)}\right)\cdot\left(1-\frac{3}{f(3)}\right)\cdot\ldots\left(1-\frac{3}{f(2024)}\right)\cdot\left(1-\frac{3}{f(2025)}\right).$$

5. W trójkąt równoboczny ABC o boku długości 6 wpisano okrąg. Wykaż, że dla dowolnego punktu P leżącego na tym okręgu spełniona jest równość:

$$|AP|^2+|BP|^2+|CP|^2=45.$$

Termin oddania 07.01.2026