



UNIWERSYTET
JAGIELLOŃSKI
W KRAKOWIE

**IX edycja szkolnego konkursu
„O jeden poziom abstrakcji wyżej”
objętego patronatem Dziekana Wydziału Matematyki
i Informatyki Uniwersytetu Jagiellońskiego.**

rok szkolny 2021/22

II etap

Zad.1

Udowodnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych dodatnich x, y, z zachodzi nierówność:

$$\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{y^2 + 1} + \sqrt{z^2 + 1} \geq \sqrt{6(x + y + z)}.$$

Zad.2

Wyznacz liczbę równań postaci $x^2 - px + q = 0$ gdzie $p, q \in \mathbb{N}$, których pierwiastki są mniejsze od 8.

Zad.3

Wykaż, że do zbioru wartości ciągu $a_n = \sin \frac{\pi(n^7 - n)}{14}$ nie należy liczba 1.

Zad.4

W równoległoboku $ABCD$ dane są $|AB| = 18, |BC| = 10, |\sphericalangle ABC| = 120^\circ$.

Punkt K leży na boku AB i $|AK| = 12$. Punkt L jest środkiem boku BC .

Proste CK i DL przecinają się w punkcie M . Oblicz pole czworokąta $KBLM$.

Zad.5

Oto informacje o trzech przyjaciółach :

Każdy z nich ma dorosłego syna, lecz wśród ich sześciorga dzieci jest tylko jedna córka. Pan Babacki ma o jedno dziecko mniej niż pan Czesław. Pan Bolesław ma tyle dzieci, ile mają łącznie pan Adam i pan Czesław. Pan Cabacki ma tylu synów, ilu ma pan Babacki.

Jak ma na imię pan Abacki i ilu ma synów?